Jakub Juránek
UČO 393110

6. Pomocí transformace projektivních homogenních souřadnic určete normální rovnici a projektivní typ kuželosečky

$$k: \quad 3x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 14x_2x_3 = 0.$$

Určete transformační rovnice, které převádějí rovnici kuželosečky na normální tvar.

$A = (1, 0, 0), \quad k(A) = 3$

$$p_A: \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 7 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$p_A: \quad 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$$

$B = (1, 0, 1), \quad k(B) = 3$

$$p_B: \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 7 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$p_B: \quad 9x_2 + 3x_3 = 0$$

$$p_B: \quad 3x_2 + x_3 = 0$$

$C \in p_A \cap p_B$:

$$\begin{aligned} C \in p_A: &\quad 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ C \in p_B: &\quad 3x_2 + x_3 = 0 \end{aligned}$$

$$C = (11, -3, 9), \quad k(C) = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 7 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 73 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} = -219$$

$\langle A, B, C, A + B + C \rangle$:

$$k: \quad 3y_1^2 + 3y_2^2 - 219y_3^2 = 0$$

$$\bar{A} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, 0 \right), \quad \bar{B} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3} \right), \quad \bar{C} = \left(\frac{11\sqrt{219}}{219}, -\frac{\sqrt{219}}{73}, \frac{3\sqrt{219}}{73} \right)$$

Normální rovnice v $\left\langle \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} \right\rangle$:

$$k: \quad z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 = 0$$

Projektivní typ: regulární reálná kuželosečka
Transformační rovnice:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{11\sqrt{219}}{219} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{219}}{73} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{3\sqrt{219}}{73} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

7. Určete středy kuželosečky k.
a)

$$k: \quad x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -4 & 4 & 0 \\ -4 & 8 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow (2,1,0)$$

Kuželosečka k má jediný nevlastní střed určený směrem $(2,1)$.

b)

$$k: \quad 3x^2 + 5xy + y^2 - 8x - 11y - 7 = 0$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 5 & -8 & 0 \\ 5 & 2 & -11 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -11 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -13 & -26 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow (3,-2,1)$$

Kuželosečka k má jediný vlastní střed $[3,-2]$.

8. Určete asymptoty kuželosečky

$$k: \quad 3x^2 + 7xy + 4y^2 + 5x + 2y - 6 = 0$$

$$\begin{aligned} 3x_1^2 + 7x_1x_2 + 4x_2^2 + 5x_1x_3 + 2x_2x_3 - 6x_3^2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$3x_1^2 + 7x_1x_2 + 4x_2^2 = 0$$

$$D = 49x_2^2 - 48x_2^2 = x_2^2$$

$$x_1 = \frac{-7x_2 \pm x_2}{6} = \begin{cases} -x_2 & N_1 = (1,-1,0) \\ -\frac{4}{3}x_2 & N_2 = (4,-3,0) \end{cases}$$

$$a_1: \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 7 & 5 \\ 7 & 8 & 2 \\ 5 & 2 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad a_2: \quad \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 7 & 5 \\ 7 & 8 & 2 \\ 5 & 2 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$a_1: \quad -x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \qquad a_2: \quad 3x_1 + 4x_2 + 14x_3 = 0$$

$$a_1: \quad x + y - 3 = 0 \qquad a_2: \quad 3x + 4y + 14 = 0$$